Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 2

Samuel Barbosa Feitosa

Aula 1

Divisibilidade I

Teorema 1. *(Algoritmo da Divisão) Para quaisquer inteiros positivos a e b, existe um único par (q, r) de inteiros não negativos tais que $b = aq + r$ e $r < a$. Os números q e r são chamados de quociente e resto, respectivamente, da divisão de b por a.*

Exemplo 2. *Encontre um número natural N que, ao ser dividido por 10, deixa resto 9, ao ser dividido por 9 deixa resto 8, e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.*

O que acontece ao somarmos 1 ao nosso número? Ele passa a deixar resto 0 na divisão por $10, 9$ e 8. Assim, um possível valor para N é $10 \cdot 9 \cdot 8 - 1$.

Exemplo 3. *a) Verifique que $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$*

b) Calcule o resto da divisão de 4^{2012} por 3.

Para o item a), usando a distributividade e efetuando os devidos cancelamentos no lado direito, podemos escrever:

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a^2 + a - a^{n-1} - a^{n-2} - \ldots - a - 1 = a^n - 1.$$

Para o item b), veja que $3 = 4 - 1$ e assim é natural substituir os valores dados na expressão do primeiro item:

$$4^{2012} - 1 = 3(4^{2011} + \ldots + 4 + 1).$$

Isso significa que $q = (4^{2011} + \ldots + 4 + 1)$ e que $r = 1$.

Observação 4. *O teorema anterior admite um enunciado mais geral: Para quaisquer inteiros a e b, com $a \neq 0$, existe um único par de inteiros (q, r) tais que $b = aq + r, 0 \leq r < |a|$. Por exemplo, o resto da divisão de -7 por -3 é 2 e o quociente é 3.*

Iremos agora estudar propriedades a respeito das operações com restos.

Teorema 5. *(Teorema dos Restos) Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2 na divisão por a, respectivamente, então:*

$b_1 + b_2$ *deixa o mesmo resto que* $r_1 + r_2$ *na divisão por* a
$b_1 b_2$ *deixa o mesmo resto que* $r_1 r_2$ *na divisão por* a*.*

Demonstração. Por hipótese, existem q_1, q_2 e q tais que: $b_1 = aq_1 + r_1$, $b_2 = aq_2 + r_2$ e $r_1 + r_2 = aq + r$, logo:

$$b_1 + b_2 = a(q_1 + q_2 + q) + r.$$

Como $0 < r < |a|$, $b_1 + b_2$ deixa resto r quando dividido por a. A demonstração para o produto é deixada ao cargo do leitor. □

Observação 6. *Em alguns casos, é preferível que o professor faça uma demonstração do resultado anterior para* $a = 3$ *ou* $a = 5$ *apenas com o intuito de deixar os alunos mais confortáveis a respeito do resultado. É preferível que mais tempo seja gasto resolvendo exemplos e problemas. Na seção de congruências, os alunos terão um contato mais apropriado com o enunciado anterior.*

Exemplo 7. *Qual o resto que o número* $1002 \cdot 1003 \cdot 1004$ *deixa quando dividido por 7?*

Como 1002 deixa resto 1 por 7, o número acima deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ por 7.

Exemplo 8. *Qual o resto que o número* 4^{5000} *deixa quando dividido por 3?*

Como 4 deixa resto 1 por 3, 4^{5000} deixa o mesmo resto que $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{5000} = 1$ por 3.

Exemplo 9. *Qual o resto que o número* 2^{2k+1} *deixa quando dividido por 3?*

Note que 2^0 deixa resto 1 por 3, 2^1 deixa resto 2 por 3, 2^2 deixa resto 1 por 3, 2^3 deixa resto 2 por 3, 2^4 deixa resto 1 por 3. Precebeu alguma coisa? Como 100 é par, o resto deverá ser 1. Como 2^2 deixa resto 1, então $2^{2k} = \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^2}_{k}$ deixa o mesmo resto que $\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{k} = 1$ e $2^{2k+1} = 2^{2k} \cdot 2$ deixa o mesmo resto que $1 \cdot 2 = 2$ por 3.

Exemplo 10. *Qual o resto de* $n^3 + 2n$ *na divisão por 3?*

Se o resto de n por 3 é r, o resto de $n^3 + 2n$ é o mesmo de $r^3 + 2r$. Para $r = 0$, esse resto seria 0. Para $r = 1$, seria o mesmo resto de 3 que é 0. Finalmente, para $r = 2$, o resto seria o mesmo de $8 + 4 = 12$ que também é 0. Assim, não importa qual o resto de n por 3, o número $n^3 + 2n$ sempre deixará resto 0. Uma ideia importante nessa solução foi dividí-la em casos. Também poderíamos ter resolvido esse exemplo apelando para alguma fatoração:

$$n^3 + 2n = n^3 - n + 3n = n(n^2 - 1) + 3n = n(n-1)(n+1) + 3n.$$

Como $n-1, n$ e $n+1$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, o último termo da igualdade anterior é a soma de dois múltiplos de 3 e consequentemente o resto procurado é 0.

Observação 11. *Fatorações podem ser muito úteis para encontrarmos os valores explícitos de q e r.*

Exemplo 12. *Prove que, para cada n natural,*

$$(n+1)(n+2)\dots(2n)$$

é divisível por 2^n.

Veja que

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = \frac{1\cdot 2\cdots 2n}{1\cdot 2\cdots n}.$$

Para cada número natural k no produto escrito no denominador, temos uma aparição de $2k$ no produto escrito no numerador. Basta efetuarmos os cancelamentos obtendo:

$$(n+1)(n+2)\dots(2n) = 2^n\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1).$$

Exemplo 13. *(Olimpíada de Leningrado 1991) Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab-cd$, que também é um número natural. Prove que $ab-cd=1$.*

Se chamarmos $p = ab - cd$, teremos $a = px, b = py, c = pz$ e $d = pt$ onde x, y, z e t são inteiros. Assim, $p = p^2(xy - zt)$. Consequentemente $1 = p(xy - zt)$ e concluímos que $p = 1$, pois p é natural.

Exemplo 14. *A soma digital $D(n)$ de um inteiro positivo n é definida recursivamente como segue:*

$$D(n) = \begin{cases} n & \text{se } 1 \le n \le 9, \\ D(a_0 + a_1 + \ldots + a_m) & \text{se } n > 9, \end{cases}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_m$ são todos os dígitos da expressão decimal de n na base 10, i.e.,

$$n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

Por exemplo, $D(989) = D(26) = D(8) = 8$. Prove que: $D((1234)n) = D(n)$, para $n = 1, 2, 3\ldots$

Como $10^n - 1^n = (10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1)$, podemos concluir que 10^n sempre deixa resto 1 na divisão por 9. Assim, $n = a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$, deixa o mesmo resto que $a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0$ na divisão por 9. Desse modo, $D(n)$ nada mais é do que o resto na divisão por 9 do número n. Como 1234 deixa resto 1 por 9, o número $(1234)n$ deixa o mesmo resto que $1\cdot n$ por 9, ou seja, $D((1234)n) = D(n)$.

Observação 15. *O exemplo anterior contém o critério de divisibilidade por 9, i.e., n deixa o mesmo resto que $D(n)$ na divisão por 9. O critério de divisibilidade por 3 é análogo pois 10^n também sempre deixa resto 1 por 3.*

Exemplo 16. *Encontre todos os pares de inteiros positivos a e b tais que $79 = ab + 2a + 3b$.*

Fatoremos a expressão anterior. Somando 6 aos dois lados da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 85 &= 6 + ab + 2a + 3b \\ &= (3+a)(2+b) \end{aligned}$$

Assim, $(3+a)$ e $(2+b)$ são divisores positivos de 85 maiores que 1. Os únicos divisores positivos de 85 são $1, 5, 19, 85$. Logo, os possíveis pares de valores para $(3+a, 2+b)$ são $(5, 19)$ ou $(19, 5)$ que produzem as soluções $(a, b) = (2, 17)$ e $(16, 3)$.

Problema 17. *(Olimpíada Russa) Prove que se* $\dfrac{2^n - 2}{n}$ *é um inteiro, então* $\dfrac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1}$ *também é um inteiro.*

Se $k = \dfrac{2^n - 2}{n}$, então

$$\begin{aligned} \frac{2^{2^n-1} - 2}{2^n - 1} &= \frac{2(2^{2^n-2} - 1)}{2^n - 1} \\ &= 2\left(\frac{2^{nk} - 1}{2^n - 1}\right) \\ &= 2\left(\frac{(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1)}{2^n - 1}\right) \\ &= 2(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1), \end{aligned}$$

é um número inteiro.

Problemas Propostos

Problema 18. *Encontre os inteiros que, na divisão por 7, deixam um quociente igual ao resto.*

Problema 19. *Determinar os números que divididos por 17 dão um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.*

Problema 20. *(OCM 1985) Encontre o quociente da divisão de* $a^{128} - b^{128}$ *por*

$$(a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$$

Problema 21. *(OCM 1994) Seja* $A = 777\ldots77$ *um número onde o dígito "7"aparece 1001 vezes. Determinar o quociente e o resto da divisão de A por 1001.*

Problema 22. *Encontre um inteiro que deixa resto* 4 *na divisão por* 5 *e resto* 7 *na divisão por* 13

Problema 23. *Encontre o menor inteiro que, dividido por 29 deixa resto 5, e dividido por 31 dá resto 28.*

Problema 24. *Prove que, para todo inteiro positivo n o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ é divisível por* 120.

Problema 25. *(Fatorações Importantes)*

a) Seja $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n-1}$. Veja que $S + z^n = 1 + zS$ então $S(z-1) = z^n - 1$. Conclua que, para quaisquer x e y vale:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

b) Mostre que se n é ímpar vale:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Problema 26. *Prove que, o número $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99} + 5^{99}$ é múltiplo de* 5.

Problema 27. *Mostre que o número $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ é multiplo de 10 para todo natural n.*

Problema 28. *Encontre o resto da divisão $37^{10} - 1$ por 11.*

Problema 29. *Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.*

Problema 30. *Encontre o último dígito do número 1989^{1989}.*

Problema 31. *Mostre que se n divide a então $2^n - 1$ divide $2^a - 1$.*

Problema 32. *(Cone Sul 1996) Provar que o número*

$$\frac{1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1}{1996^2}$$

é um inteiro.

Problema 33. *Mostre que para n ímpar, n divide $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$*

Problema 34. *Existe um natural n tal que $n^n + (n+1)^n$ é divisível por 2011?*

Problema 35. *Quantos números inteiros positivos n existem tais que $n+3$ divide n^2+7?*

Problema 36. *Encontre o número de inteiros n tais que*

1. $1000 < n < 8000$.
2. $n^{n+1} + (n+1)^n$ *é divisível por 3.*

Problema 37. *Sejam m e n naturais tais que $mn+1$ é múltiplo de 24, mostre que $m+n$ também é múltiplo de 24.*

Problema 38. *(Irlanda 1997) Encontre todos os pares de inteiros* (x, y) *tais que* $1+1996x+1998y = xy$.

Dicas e Soluções

18. Os números são $\{0, 8, 16, 24, \ldots, 8 \cdot 7\}$.

18. Escreva $n = 17q + q^2$ e note que $0 \leq q^2 < 17$. Assim, $q = 0, 1, 2, 3, 4$.

19. Use a diferença de quadrados sucessivas vezes para obter $(a - b)$ como quociente.

21. O número do problema é igual a $\frac{7(10^{1001}-1)}{9}$. Além disso, $\frac{10^{999}+1}{10^3+1}$ é inteiro e $\frac{10^{1001}-1}{10^3+1} = 100 \cdot \frac{10^{999}+1}{10^3+1} - \frac{100}{10^3+1}$.

22. Os números que satisfazem essa propriedade são os números da forma $65k + 59$.

24. Basta mostrar que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de $3, 8$ e 5. Na divisão por 5, temos quatro restos possíveis: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Assim, o número $n^5 - 5n^3 + 4n$ possui o mesmo resto na divisão por 5 que um dos cinco números: $\{0^5 - 5 \cdot 0^3 + 40, 1^5 - 5 \cdot 1^3 + 4, 2^5 - 5 \cdot 2^3 + 8, 3^5 - 5 \cdot 3^3 + 12, 4^5 - 5 \cdot 4^3 + 16\}$. Como todos esses números são múltiplos de 5, segue que $n^5 - 5n^3 + 4n$ é múltiplo de 5 para todo n inteiro. O procedimento com 3 e 8 é semelhante.

25. Para o item a), troque z por $\frac{x}{y}$. Para o item b), substitua y por $-y$ no item anterior.

26. Pelo problema anterior, como 99 é ímpar temos: $1^{99} + 4^{99} = (1 + 4)(1^{98} + 1^{97} \cdot 4 + \ldots + 1 \cdot 4^{97} + 4^{98})$. Daí, segue que $1^{99} + 4^{99}$ é múltiplo de 5. Analogamente podemos mostrar que $2^{99} + 3^{99}$ é múltiplo de 5.

27. O número em questão é mútiplo de 2 pois é a soma de dois ímpares e dois pares. Para ver que também é múltiplo de 5, basta notar que 5 divide $1^n - 6^n$ e $8^n - 3^n$. Isso pode ser facilmente mostrado usando a fatoração do exercício 25.

31. Se $a = nk$, temos $(2^n - 1)(2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \ldots + 2^n + 1) = 2^{nk} - 1$.

32. Veja que $1995 \cdot 1997^{1996} - 1996 \cdot 1997^{1995} + 1 = 1995 \cdot (1997^{1996} - 1) - 1996 \cdot (1997^{1995} - 1)$. Pela fatoração de $x^n - y^n$,

$$\frac{1996 \cdot (1997^{1995} - 1)}{1996^2} = (1997^{1994} + 1997^{1993} + \ldots + 1),$$

é inteiro. Além disso, pela mesma fatoração,

$$\frac{1995 \cdot (1997^{1996} - 1)}{1996^2} = 1995 \cdot \left(\frac{1997^{1995} - 1}{1996} + \frac{1997^{1994} - 1}{1996} + \ldots + \frac{1997 - 1}{1996} + \frac{1996}{1996} \right),$$

é uma soma de números inteiros.

33. Como n é impar,

$$(n-i)^n + i^n = ((n-i)+i)((n-i)^{n-1} - (n-i)^{n-2}i + \ldots - (n-i)i^{n-2} + i^{n-1}).$$

34. Faça $n = 1005$ e use a fatoração de $x^n + y^n$.

37. Fatore a expressão como:

$$(x-1998)(y-1996) = xy - 1998y - 1996x + 1998 \cdot 1996 = 1997^2.$$

Os divisores de 1997^2 são $\{\pm 1, \pm 1997, \pm 1997^2\}$. Resolvendo os sistemas correspondentes à essas possibilidades, temos: $(x, y) = (1999, 1997^2 + 1996), (1997, -1997^2 + 1996), (3995, 3993), (1, -1), (1997^2 + 1998, 1997), (-1997^2 + 1998, 1995)$.

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[2] E. Carneiro, O. Campos and F. Paiva, Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 (Níveis Júnior e Senior), Ed. Realce, 2005.

[3] S. B. Feitosa, B. Holanda, Y. Lima and C. T. Magalhães, Treinamento Cone Sul 2008. Fortaleza, Ed. Realce, 2010.

[4] D. Fomin, A. Kirichenko, Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991, MathPro Press, Westford, MA, 1994.

[5] D. Fomin, S. Genkin and I. Itenberg, Mathematical Circles, Mathematical Words, Vol. 7, American Mathematical Society, Boston, MA, 1966.

[6] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, An Introduction to the Theory of Numbers.

Teoria dos Números 01 - Divisibilidade

Problema 1. O dígito das unidades de um quadrado de um inteiro é 9 e o dígito das dezenas desse quadrado é 0. Prove que o dígito das centenas é par.

Solução. Seja n esse inteiro. Então temos $n^2 = 100k + 9$, onde $k \in \mathbb{N}$. Note que o dígito das centenas é par se, e somente se, k é par. Logo, devemos mostrar que k é par.
Suponha que $n = 10A + B$, onde A é um inteiro qualquer e B é um algarismo na base 10. Dessa forma, $100k + 9 = 10A^2 + 20AB + B^2$ e , portanto, $B^2 - 9$ é múltiplo de 10. Como $0 \leq B \leq 9$, os possíveis valores de B são 3 e 7.
Se $B = 3$, então

$$\begin{aligned} 100k + 9 = 100A^2 + 60A + 9 \quad &\iff \quad 5k = 5A^2 + 3A \\ &\iff \quad 5k = A(5A + 3). \end{aligned}$$

Veja que, independentemente da paridade de A, o termo $A(5A + 3)$ é sempre par e portanto k é par.
Agora, se $B = 7$, então

$$\begin{aligned} 100k + 9 = 100A^2 + 140A + 49 \quad &\iff \quad 5k = 5A^2 + 7A + 2 \\ &\iff \quad 5k = A(5A + 7) + 2. \end{aligned}$$

Analogamente, k é par.

Problema 2. Qual o menor natural que deixa resto 4 na divisão por 7 e resto 10 na divisão por 13?

Solução. Seja n um natural satisfazendo essas condições. Então $n + 3$ deve ser divisível por 7 e por 10. O menor valor de n é $mmc(10, 7) - 3 = 70 - 3 = 67$.

Problema 3. Qual o menor multiplo de 5 que deixa resto 2 quando dividido por 3 e por 4?

Solução. Se x é um múltiplo de 5 que satisfaz estas condições então devemos ter $x = 3m+2 = 4n+2$, para m e n inteiros positivos. De forma que $3m = 4n$. Concluímos que $m = 4t$ e $n = 3t$, para algum t. Com isso, $x = 12t + 2$. O menor múltiplo de 5 desta forma é $50 = 12 \cdot 4 + 2$.

Problema 4. Qual o resto de 2^{n^3+2n} na divisão por 7?

Solução. Note que $n^3 + 2n = n(n+1)(n+2) - 3n^2$. Como n, $n+1$ e $n+2$ são consecutivos, um deles é múltiplo de 3. Assim, $n^3 + 2n$ será sempre divisível por 3. Sendo assim, escrevamos

$n^3 + 2n = 3m$. Queremos saber o resto de 2^{3m} na divisão por 7. Observando que $2^{3m} = 8^m$ e que $8^m - 1 = (8-1)(8^{m-1} + \ldots + 8 + 1)$, concluímos que o resto procurado é 1.

Problema 5. Qual o resto de $\dfrac{4^{2015}-1}{3}$ na divisão por 3?

Solução. Primeiramente note que 4^n deixa mesmo resto que $1^n = 1$ para todo n natural. Além disso, sabemos que

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1).$$

Portanto, $\dfrac{4^{2015}-1}{3}$ deixa o mesmo resto que

$$4^{2014} + 4^{2013} + \ldots + 4 + 1$$

que por sua vez deixa o mesmo resto que

$$1 + 1 + \ldots + 1 + 1 = 2015$$

Portanto, o resto é o mesmo que o de 2015 na divisão por 3 e é igual a 2.

Problema 6. Qual é o último dígito do número 2015^{2015}?

Solução. O ultimo dígito é igual ao resto que o número deixa na divisão por 10. Portanto, o último dígito de 2015^{2015} é o mesmo que o de 5^{2015}. Toda potência de 5 deixa resto 5 na divisão por 10, logo o dígito que procuramos é 5.

Problema 7. Encontre o algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 97 \times 99$.

Solução. Queremos o resto na divisão por 10. O resto é igual ao do número

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 1 \times \ldots \times 7 \times 9 = (1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9)^{10}.$$

Temos $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$ que deixa resto 5. Sendo assim, o resto que queremos é o mesmo que 5^{10} que é 5.

Problema 8. Quais são os possíveis restos na divisão de $n! + 13$ na divisão por 5?

Solução. Vamos analisar os casos:

i. Se $n = 1$ então $n! + 13 = 14$ que deixa resto 4;

ii. Se $n = 2$ temos $n! + 13 = 15$ que deixa resto 0;

iii. Se $n = 3$, $n! + 13 = 19$ e o resto é 4;

iv. Para $n = 4$ temos $n! + 13 = 37$ com resto 2;

v. Para $n \geq 5$, $n! + 13$ deixa mesmo resto que $0 + 13$, isto é, 3.

Finalmente, os possíveis resto são $0, 2, 3$ e 4

Problema 9. Encontra o resto de 6^{2009} na divisão por 37.

Solução. Note que 6^2 deixa resto -1 na divisão por 37. Logo, 6^4 deixa resto 1. Dessa forma, $6^{2009} = (6^4)^{502} \cdot 6$ deixa o mesmo resto que $1^{502} \cdot 6 = 6$.

Problema 10. Encontre todos os pares de inteiros a e b tais que $22 = ab + 3a - b$.

Solução. Perceba que

$$22 = ab + 3a - b \quad \Longleftrightarrow \quad 19 = (a - 1)(b + 3).$$

Como 19 é primo, devemos ter $a - 1 = 19$ e $b + 3 = 1$ ou $a - 1 = 1$ e $b + 3 = 19$ ou $a - 1 = -1$ e $b + 3 = -19$ ou $a - 1 = -19$ e $b + 3 = -1$. Isso nos dá as soluções $(a; b) = (20; -2), (2; 16), (0; -22), (-18; -4)$.